構成的集合関数からの k -次元要素の抽出

Extraction of a k -dimensional element from a constructive set function

○¹ 福田亮治, ² 本田あおい, ³ 岡崎 悦明
○¹ Ryoji Fukuda, ² Aoi Honda, ³ Yoshiaki Okazaki
¹ 大分大学 ² 九州工業大学 ³ ファジィシステム研究所

Abstract: We define a constructive non-additive set function as a generalization of a constructively k -additive set function ($k \in \mathbb{N}$). We prove that a distortion measure is a constructive set function if the distortion function is analytic.

A constructive set function is expressed by a signed measure on the extraction space, which is the family of all finite subsets of the original space. In the case where the extraction space is replaced by the set family with cardinalities less than k ($k \in \mathbb{N}$), the corresponding set function is constructively k -additive. In the case where the σ -algebra is countably generated, we extract this k -dimensional element by using the generalized Möbius transform.

1 はじめに

可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ (常に $\mu(\emptyset) = 0$ を仮定) に対する構成的な k 加法性 ($k \in \mathbb{N}$) は, k 個以下の有限部分集合の全体である抽出空間の実測度を用いて表現される。ここで定義する構成的集合関数は抽出空間を任意有限個の部分集合全体にして, 構成的な k 加法的測度を拡張したものである。 σ 加法的な有限測度を解析的な関数で変形した歪測度 (distorted measure) は一定の条件下で構成的集合関数になることがわかる。

k 加法的な集合関数に対応する抽出空間の σ -集合体は後述する制限選択の集まりにより生成される。制限選択に対する集合関数の値は一般化されたメビウス変換を用いて表現されるが, メビウス変換は測度によりが一意的に定まることから, 表現に用いる実測度は一意に定まることが分かる ([1])。この性質は容易に個数の制限のない空間に広げることができるため, 構成的集合関数も一般化されたメビウス変換を用いて解析することができる。抽出空間の要素を k 個以下のものに制限することで一般の構成的集合関数から k 次元要素を抜き出すことができるが, 可測空間の σ -集合体が可算生成の時, 制限選択を用いた解析を行うことで一般化されたメビウス変換を用いて表現することができる。

2 基本設定

$(X, \mathcal{B})$ を可測空間で, 一点集合は全て $\mathcal{B}$ 可測とする。 X の抽出空間を次で定める。

定義 1 (抽出空間)

- (a) $X^{[*]} = \{U | U \subset X, |U| < \infty\}$
- (b) $X^{[k]} = \{U | U \subset X, |U| \leq k\}$
- (c) $X^{(k)} = \{U | U \subset X, |U| = k\}$

定義 2 (制限選択)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{\mathbb{D} = (D_1, \dots, D_n) : \{D_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{B} : \text{disjoint}\} \\ \Gamma(\mathbb{D}) &= \Gamma(D_1, \dots, D_n) \end{aligned}$$

$$= \{\{x_j\}_{j \leq m} \in X^{[*]} : \{x_j\}_j \subset \bigcup_{k \leq n} D_k, \\ D_k \cap \{x_j\}_j \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{B}^{[*]} = \sigma\{\Gamma(\mathbb{D}) : \mathbb{D} \in \mathcal{D}\}$$

また $\mathcal{B}^{[k]}, \mathcal{B}^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) をそれぞれ $\mathcal{B}^{[*]}$ の $X^{[k]}, X^{(k)}$ への制限として定義する。

定義 3 (一般化メビウス変換)

$\mathbb{D} = \{D_1, \dots, D_n\} \in \mathcal{D}$ に対して $|\mathbb{D}| = n$ と定める。 $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$ により, 集合族としての包含関係を表すとす。また, $\cup \mathbb{D}$ を次で定める。

$$\cup \mathbb{D} = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

集合関数 μ に対して, 次で帰納的に定義される $\tau = \tau_\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を一般化メビウス変換と呼ぶ。

$$\begin{aligned} |\mathbb{D}| = 1 \text{ の場合} & \quad \tau(\mathbb{D}) = \tau(\{D\}) = \mu(D) \\ |\mathbb{D}| > 1 \text{ の場合} & \quad \tau(\mathbb{D}) = \mu(\cup \mathbb{D}) - \sum_{\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}} \tau(\mathbb{D}') \end{aligned}$$

3 構成的集合関数

定義 4 (構成的集合関数)

$(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が構成的であるとはある $(X^{[*]}, \mathcal{B}^{[*]})$ 上の実測度 $\mu^{[*]}$ に対して, 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して,

$$\mu(A) = \mu^{[*]}(A^{[*]})$$

が成り立つこととする。このとき $\mu^{[*]}$ を構成測度と呼ぶ。

構成測度が $X^{[k]}$ 上の測度の時は, 構成的な k 加法的測度である。

命題 1 μ が構成的集合関数とする。 τ を一般化メビウス変換, $\mu^{[*]}$ を対応する実測度とするとき

$$\mu^{[*]}(\Gamma(\mathbb{D})) = \tau(\mathbb{D}), \quad \forall \mathbb{D} \in \mathcal{D}$$

を満たす。

$\Gamma(\mathbb{D})$ の形の集合の互いに素な有限和全体が集合体をなすことから、上の命題よりこの集合体上に一意に測度が決まることになる。 $\mathcal{B}^{[*]}$ はこの集合体を含む最小の σ -集合体であるので、 μ により $\mu^{[*]}$ は一意に定まることになる。

有界測度の変形で与えられる集合関数は次の条件の時構成的集合関数である。

命題 2 ν が $(X, \mathcal{B})$ 上の有界測度 (正值),

$f : [0, \nu(X)] \rightarrow \mathbb{R}$ が解析的関数で原点でのテイラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ が}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |\nu(X)|^k < \infty.$$

を満たすとする。このとき $\mu(A) = f(\nu(A))$ は構成的集合関数である。

4 k 次元要素の抽出

命題 3 $\mathcal{B}$ が可算生成の時次は同値

- (a) 全ての 1 点集合が $\mathcal{B}$ 可測
- (b) 任意の点 $x, y (x \neq y)$ に対して $x \in B, y \notin B$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する。
- (c) 有限分割の列 $\{\mathbb{D}_n = \{D_k^n\}_{k=1}^{N_n}\}_{n=1}^{\infty}$ で次を満たすものが存在する。
 - (c-1) $\mathbb{D}_{n+1}$ は $\mathbb{D}_n$ の細分
 - (c-2) $\mathcal{B} = \sigma(\cup_n \mathbb{D}_n)$
 - (c-3) $x, y \in X (x \neq y)$ に対して, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq n_0$ であれば, x, y は異なる D_k^n に属する

定義 5 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ に対する分割列 $\{\{\mathbb{D}_n\}_{k=1}^{N_n}\}_{n=1}^{\infty}$ が命題 3 の (c-1) - (c-3) を満たすときこの可測空間の基本分割列と呼ぶ。

命題 4 $(X, \mathcal{B})$ が可算生成で, 任意の 1 点集合が可測であるとする。 $\{\{\mathbb{D}_n\}_{k=1}^{N_n}\}_{n=1}^{\infty}$ を $(X, \mathcal{B})$ の基本分割列とするとき任意の $k_0 \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{D}_k = \{\{\Gamma(\mathbb{D}^n)\}_{\mathbb{D}^n \subset \mathbb{D}_n, |\mathbb{D}^n|=k} : n \in \mathbb{N}\}$$

は $(X^{(k)}, \mathcal{B}^{(k)})$ の基本分割列である。

定義 6 μ を構成的集合関数, $\mu^{[*]}$ を対応する構成測度とする。 $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mu_k(A) = \mu^{[*]}(A^{[*]} \cap X^{(k)}) = \mu^{(k)}(A^{(k)})$$

を A の k 次元要素とする。

定理 7 $(X, \mathcal{B})$ が可算生成で, 任意の 1 点集合が可測な可測空間, $\{\mathbb{D}_n\}_{k=1}^{N_n}\}_{n=1}^{\infty}$ を基本分割列とする。 μ が構成的集合関数, τ を対応する一般化メビウス変換とする。任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して τ_A を

$$\tau_A(D_1, \dots, D_n) = \tau(D_1 \cap A, \dots, D_n \cap A)$$

と定めるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbb{D}^n \subset \mathbb{D}_n, |\mathbb{D}^n|=k} \tau_A(\mathbb{D}^n) = \mu_k(A).$$

が成り立つ。

5 まとめ

構成的意味での k 加法的集合関数の拡張として, 構成的集合関数を定義し, 解析的な変形関数による歪測度は構成的であることを得た。構成的な集合関数は k 加法的集合関数の可算和という構造を持っていて, その制限は一般化メビウス変換を用いて表現できることがわかった。

参考文献

- [1] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Suitable L_p spaces for a k -additive set function, Fuzzy Sets and Systems Available online 23 September 2022 In Press.

連絡先

福田亮治

E-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp